Λύσεις Θεμάτων Φεβρουαρίου
Γρ. Άλγεβρα Ι

Θέμα 1
$A \in \mathbb{R}^{11\times 11}$ Υποθ. $\det A = -2$ Υπολόγισε $\det(-3A^4)$
Λύση
$\det(A^2) = \det A \cdot \det A = (-2)^2 = 4$
$\det(A^4) = (\det A^2 \cdot \det A^2) = 4^2 = 16 = (-2)^4$
Υπενθ. Αν $B \in \mathbb{F}^{n\times n}$, $\lambda \in \mathbb{F}$ $\det(\lambda \cdot B) = \lambda^n \cdot \det B$
Απόδ. $\lambda \cdot B = \lambda I_n \cdot B = (\lambda \cdot I_n) \cdot B \Rightarrow \det(\lambda B) = \det(\lambda \cdot I_n) \cdot \det B = \lambda^n \cdot \det B$
Άρα $\det(-3A^4) = (-3)^{11} \cdot \det A^4 = (-3)^{11} \cdot 16$.

Θέμα 2
Αν V δ.χ. επί του $\mathbb{R}$ $\dim V = 3$ και e_1, e_2, e_3 βάση του V και $a \in \mathbb{R}$ δείξτε ότι και $e_1+e_2+e_3$, $e_2 + a\cdot e_3$, $a\cdot e_2 - e_3$ βάση του V.
Λύση
Εκφράζουμε $e_1+e_2+e_3$, $e_2 + a\cdot e_3$, $a\cdot e_2 - e_3$ συναρτήσει της βάσης $e_1, e_2, e_3 \Rightarrow$
$e_1+e_2+e_3 = 1\cdot e_1 + 1\cdot e_2 + 1\cdot e_3$
$e_2 + a e_3 = 0 e_1 + 1\cdot e_2 + a\cdot e_3$
$a\cdot e_2 - e_3 = 0 e_1 + a\cdot e_2 - 1\cdot e_3$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad \det A = 1 \begin{vmatrix} 1 & a \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 - a^2 \neq 0 \text{ γιατί } a \in \mathbb{R}$$

Άρα $e_1+e_2+e_3$, $e_2 + a\cdot e_3$, $a\cdot e_2 - e_3$ βάση

Θέμα 3
$$\left.\begin{aligned} x_1 + a x_2 + 2 x_3 &= b \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= b \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_1 \quad + x_3 &= 0 \end{aligned}\right\} (2)$$
Με απαλοιφή Gauss (αυτή βρίσκει κ τις λύσεις) ή με ορίζουσες

Αν $b \neq 0$ (2) αδύνατο
Αν $b = 0$ $a \neq 3 \Rightarrow$ (2) μοναδική λύση
$b = 0$ $a = 3 \Rightarrow$ (2) άπειρες λύσεις

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 2 & b \\ 1 & 3 & 2 & b \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 2 & b \\ 0 & 3-a & 0 & 0 \\ 0 & 1-a & -1 & -b \\ 0 & -2a & -3 & -2b \end{array}\right]$$

<u>Δύο περιπτώσεις</u>

$a=3$ ή $a\neq 3$

Αν $a=3$

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & 3 & 2 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -b \\ 0 & -6 & -3 & -2b \end{array}\right] \sim \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -b \\ 0 & 0 & 0 & b \end{array}\right]$$

Αν $a=3$ και $b\neq 0 \Rightarrow$ (Σ) αδύνατο

<u>Υπος</u> $b=0$ $(a=3)$ $\sim$ σύνολο λύσεων $S=\left\{\begin{pmatrix} -1/2\cdot x_3 \\ -1/2\cdot x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} : x_3 \in \mathbb{R}\right\}$

Αν $a\neq 3$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 2 & b \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -a+1 & -1 & -b \\ 0 & -2a & -3 & -2b \end{array}\right] \sim \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & b \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -b \\ 0 & 0 & 0 & b \end{array}\right]$$

Άρα εάν $b\neq 0 \Rightarrow$ (Σ) αδύνατο

$b=0 \Rightarrow$ μοναδική λύση

<u>Θέμα 4</u>

$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $D=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

Είναι γρ. ανεξάρτητα; $\lambda_1\cdot A+\lambda_2\cdot B+\lambda_3\cdot C+\lambda_4\cdot D=O_{2\times 2}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1+\lambda_3+\lambda_4 & \lambda_2+\lambda_3 \\ \lambda_3-\lambda_4 & \lambda_1+\lambda_3-\lambda_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1+\lambda_3+\lambda_4=0 \\ \lambda_2+\lambda_3=0 \\ \lambda_3-\lambda_4=0 \\ \lambda_1+\lambda_3-\lambda_4=0 \end{cases}$$

Το οποίο μετά τις πράξεις έχει μοναδική λύση $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=0$

Άρα A,B,C,D γρ. ανεξ.

Παράγουν τον $\mathbb{R}^{2\times 2}$;

1ος Τρόπος
Έστω $x,y,z,\omega \in \mathbb{R}$. Υπάρχουν $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4 \in \mathbb{R}$ με $\begin{pmatrix} x & y \\ z & \omega \end{pmatrix} = \lambda_1 A + \lambda_2 B + \lambda_3 C + \lambda_4 D$
Απάντηση: Λύνω το σύστημα κ βρίσκω ότι υπάρχουν
Άρα παράγουν

2ος Τρόπος
Από θεωρία αν $\dim V = n$ και $g_1, g_2, g_3, g_4 \in V$ τ.α.ε.ι.
i) g_1, g_2, g_3, g_4 βάση του V
ib) $g_1, g_2, \dots, g_n$ γρ. α.
ic) $g_1 \dots g_n$ παράγουν το V

Άρα εφόσον $\dim \mathbb{R}^{2\times 2} = 4$ και τα A,B,C,D είναι 4 γρ. ανεξ. $\Rightarrow$ είναι βάση του $\mathbb{R}^{2\times 2}$ άρα το παράγουν

Θέμα 5
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 17 & 8 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 12 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Συμπεραίνεται: i) A γραμμοϊσοδύναμος με τον $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ που είναι ισχυρά κλιμακωτός
ii) Προσοχή: Δεν ισχύει αναγκαστικά $\det A = \det I_3 = 1$
iii) Ισχύει από θεωρία αν $A \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$ τότε A αντιστρέψ. αν κ μόνο αν A γραμμ. με τον I_ν
iv) Από θεωρία $A^{-1} = \begin{pmatrix} 17 & 8 & 1 \\ 12 & 6 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

Θέμα 6
$T: \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ $\quad T(ax^2+bx+c) = (a+b+3c)x^2 + (2a+2b)x + (a+b-4c)$
$\ker T = \{ ax^2+bx+c \in \mathbb{R}_2[x] : (a+b+3c)x^2 + (2a+2b)x + (a+b-4c) = 0 \}$
Ισοδύναμα $\begin{cases} a+b+3c=0 \\ 2a+2b \quad =0 \\ a+b-4=0 \end{cases}$ $\xrightarrow{\text{Με πράξεις ισοδύναμο με το}}$ $\begin{cases} a+b=0 \\ c=0 \end{cases}$

Υπενθ. Ο μηδενικός υπόχωρος δεν έχει βάση (ή έχει το κενό σύνολο).

Άρα $\ker T = \{-bx^2 + bx + 0 : b \in \mathbb{R}\} = \langle -x^2 + x \rangle$ Άρα βάση του $\ker T$ είναι το $-x^2+x$

Βάση του $\operatorname{Im} T$ Έχουμε $\mathbb{R}_2[x] = \langle x^2, x, 1 \rangle$ Άρα $\operatorname{Im} T = \langle T(x^2), T(x), T(1) \rangle$
$= \langle x^2+2x+1,\ x^2+2x+1,\ 3x^2-4 \rangle$

Βρίσκω βάση $\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & -4 \end{bmatrix} \sim \cdots \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -6 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Συμπέρασμα Μια βάση του $\operatorname{Im} T$ είναι $x^2+2x+1,\ -6x-7$

Υπολογισμός $\ker T \cap \operatorname{Im} T$

Έστω $v \in \ker T \cap \operatorname{Im} T$ τότε $\exists\ \lambda \in \mathbb{R}$ και $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ ώστε $v = \lambda(-x^2+x)$
$v = \mu_1(x^2+2x+1) + \mu_2(-6x-7)$

Αφαιρώντας $\lambda(-x^2+x) = \mu_1(x^2+2x+1) + \mu_2(-6x-7) \Rightarrow$
$(-\lambda-\mu_1)x^2 + (\lambda+2\mu_1)x + (\mu_1 - 7\mu_2) = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} -\lambda - \mu_1 = 0 \\ \lambda + 2\mu_1 = 0 \\ \mu_1 - 7\mu_2 = 0 \end{cases}$ Μετά τις πράξεις $\lambda = \mu_1 = \mu_2 = 0$

Άρα $v = 0(-x^2+x) = 0$

$\ker T \cap \operatorname{Im} T = \{0\}$

$e = (x^2, x, 1)$ $[T]_e^e$

Έχουμε: $T(x^2) = x^2+2x+1$
$T(x) = x^2+2x+1$
$T(1) = 3x^2-4 = 3x^2+0x-4\cdot 1$

$[T]_e^e = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -4 \end{bmatrix}$

Εαν $g = (1, x, x^2)$ $[T]_g^g$

Έχουμε: $T(\ ) = 1\cdot g_1 + 2g_2 + 1\cdot g_3$
$T(g_2) = 1\cdot g_1 + 2\cdot g_2 + 1\cdot g_3$
$T(\ ) = 4g_1 + 0\cdot g_2 + 1\cdot g_3$

$[T]_g^g = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$[T]_g^g = [T \circ id_V]_g^g = [T]_e^g\, [id_V]_g^e = [id_V \circ T]_e^g\, [id_V]_g^e = [id_V]_e^g\, [T]_e^e\, [id_V]_g^e$

18/2/16

Παρατήρηση: Όλοι οι δ.χ από εδώ κ στο εξής, πεπερασμένης διάστασης και αν μιλάμε για βάση τους είναι μη μηδενικοί (για να μη το γράφουμε συνέχεια)

Ορισμός: Έστω $e=(e_1 \dots e_\nu)$ $g=(g_1 \dots g_\nu)$ δύο βάσεις του δ.χ του V

Ο πίνακας $P=[id_V]_e^g$ λέγεται Πίνακας Αλλαγής Βάσης από την βάση e στην g

(Ισχύει $\forall v\in V$ $[v]_g = P(v)_e$)

Παράδειγμα $V=\mathbb{R}^2$ $e=(e_1=(1,1), e_2=(1,0))$ $g=(g_1=(0,1), g_2=(2,1))$ διατάξεις του V

$id_V(e_1)=e_1=(1,1)=+1/2\, g_1 + 1/2\, g_2$

$id_V(e_2)=e_2=(1,0)=-1/2\, g_1 + 1/2\, g_2$ Άρα $[id_V]_e^g = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$

Παρατήρηση: Δείξαμε ότι αν $f: V \to W$ ισομορφισμός, e βάση του V, g βάση του W τότε $[f]_e^g$ αντιστρέψιμος και $\left([f]_e^g\right)^{-1} = [f^{-1}]_g^e$

Άρα για $id_V: V \to V$ και e,g διατάξεις του V έχουμε $[id_V]_e^g$ αντιστρέψιμος και

$\left([id_V]_e^g\right)^{-1} = [(id_V)^{-1}]_g^e = [id_V]_g^e$ (γιατί $(id_V)^{-1}=id_V$)

Άρα ο πίνακας αλλ. βάσης από τη βάση e στη βάση g είναι ο αντίστροφος πίνακας από τον πίνακα αλλ. βάσης από τη βάση g στη βάση e.

Αν $P=[id_V]_e^g$ τότε $P^{-1}=[id_V]_g^e$

Ισοδύναμοι Πίνακες

Ορισμός: Έστω $\mathbb{F}$ σώμα $A,B\in \mathbb{F}^{\nu\times\mu}$ δύο πίνακες ίδιων διαστάσεων. Οι A,B λέγονται ισοδύναμοι εάν $\exists$ αντιστρέψιμοι $P\in\mathbb{F}^{\nu\times\nu}$, $Q\in\mathbb{F}^{\mu\times\mu}$ με $B=PAQ$

Θεώρημα (Χωρίς Απόδειξη): Έστω $A,B\in\mathbb{F}^{\nu\times\mu}$ ΤΑΕΙ

i) A,B ισοδύναμοι πίνακες

ii) βαθμίδα$(A)=$ βαθμίδα(B)

Πόρισμα 1: Η σχέση "A ισοδ. B" για $A,B\in\mathbb{F}^{\nu\times\mu}$ είναι σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο $\mathbb{F}^{\nu\times\mu}$. Δηλαδή: A ισοδύναμος με A, (Αν A ισοδ. με B, B ισοδ. με A) και (Αν A ισοδ. με B κ B ισοδ. C τότε A ισοδ. με C). Απόδειξη Άμεση από το Θεώρημα

Πόρισμα 2: Έστω $A\in\mathbb{F}^{\nu\times\mu}$ με βαθμίδα$(A)=\rho\geq 1$ Τότε ο A είναι ισοδ. με τον πίνακα

$\begin{pmatrix} I_\rho & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\in\mathbb{F}^{\nu\times\mu}$ π.χ. Για $\nu=2, \mu=3, \rho=1$ $\to$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Παρ.: $\nu=\mu=3, \rho=2$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Απόδειξη: Άμεσο από το θεώρημα γιατί βαθμίδα $\begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = p$ αφού είναι κλιμακωτός με p μη-μηδενικές γραμμές

Ερώτημα: Πως βρίσκουμε $P \in F^{\nu \times \nu}$, $Q \in F^{\mu \times \mu}$ αντιστρέψιμους με $PAQ = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ όπου $p =$ βαθμίδα(A);

Απάντηση: Την Τρίτη ή Πέμπτη

Έστω $F: V \to W$ γραμμική e βάση του V, g βάση του W, e' βάση του V, g' βάση του W. Πως συνδέονται οι πίνακες $[F]_e^g$ και $[F]_{e'}^{g'}$;

Πρόταση: Οι πίνακες $[F]_e^g \in F^{\dim W \times \dim V}$ κ $[F]_{e'}^{g'} \in F^{\dim W \times \dim V}$ είναι ισοδύναμοι

Απόδειξη: Έχουμε $[F]_{e'}^{g'} = [id_W \circ F \circ id_V]_{e'}^{g'} = [id_W]_g^{g'} [F]_e^g [id_V]_{e'}^e$

(γιατί $id_W \circ F \circ id_V = F$)

Αλλά είδαμε ότι $[id_W]_g^{g'}$ και $[id_V]_{e'}^{e}$ αντιστρέψιμοι. Το αποτ. έπεται.

Δηλαδή αν αλλάζουμε το ζεύγος βάσεων (e του V, g του W) ο πίνακας της F αλλάζει σε κάποιο πίνακα ισοδύναμο με τον αρχικό

Πόρισμα: Οι πίνακες $[f]_e^g$ και $[f]_{e'}^{g'}$ έχουν την ίδια βαθμίδα

Απόδειξη: Άμεση από το θεώρημα Ισοδύναμοι <=> Ίδιες βαθμίδες

Ορισμός: Έστω $f: V \to W$ γραμμ. με V, W πεπερ. διάστ. μη μηδενικοί δ.χ. επί του $\mathbb{F}$

Έστω e βάση του V, g βάση του W. Ορίζω βαθμίδα(f) = βαθμίδα $[f]_e^g$

Τότε από το πόρισμα βαθμίδα(f) καλά ορισμένη (δεν εξαρτάται από την επιλογή των e, g)

Πρόταση: Έστω $f: V \to W$ γραμμική Τότε $\boxed{\text{βαθμίδα}(f) = \dim Im f = \dim V - \dim Ker f}$ ⊛

Παράδειγμα: Έστω $T: \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_3[x]$ η γραμμ. απεικόνιση με $T(f(x)) = f'(x)$

Υπολογίστε βαθμίδα(T)

Απόδειξη: 1ος τρόπος (Υπολογισμός $kerT$) $T(a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0) = 3 a_3 x^2 + 2 a_2 x + a_1$

Άρα $kerT = \{a_0 : a_0 \in \mathbb{R}\}$ Άρα 1 βάση του $kerT \Rightarrow \dim kerT = 1$

Άρα από ⊛ βαθμίδα$(T) = 4 - 1 = 3$

2ος Τρόπος: Θέτουμε $e = g = (x^3, x^2, x, 1)$ βάση του $\mathbb{R}_3[x]$

Έχουμε $T(x^3) = 3x^2$, $T(x^2) = 2x$, $T(x) = 1$, $T(1) = 0$

$[T]_e^e = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ Με γραμμοπράξεις $[T]_e^e \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ Άρα έχει βαθμίδα 3